Rapport du projet

Mises en oeuvre de la méthode des éléments finis

Thibault Cimic

29 avril 2017

Superviseur :
X. Claeys, P. Marchand

Paris
Universite Pierre et Marie Curie

1 Problème de Helmoltz

1.1 Question 1

La première routine crée est : read(filename). Elle renvoie le tableau des noeuds et des éléments du maillage filename.
La deuxième routine crée est : PlotMesh(filename). Elle affiche le maillage filename comme sur la figure suivante.

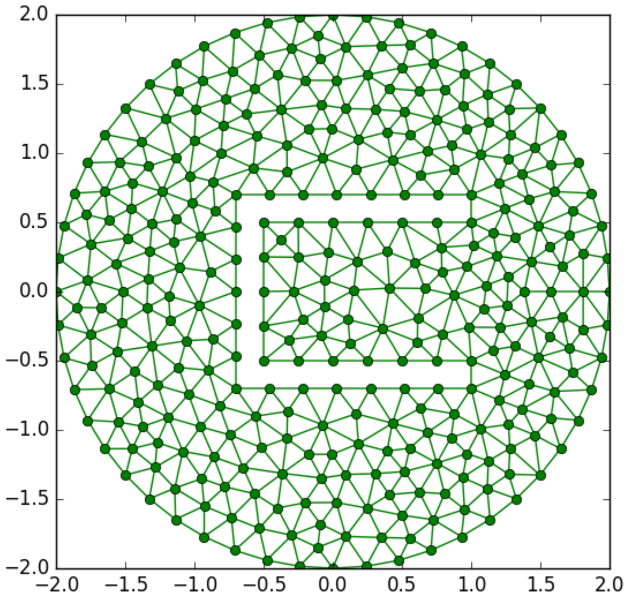

Figure 1 – Graphique obtenu par la routine PlotMesh pour le maillage 3

L'utilisateur dipose également d'une troisième routine nommée : PlotOnMesh(f,filename, title = ""), pour son utilisation se référer au fichier README.txt.

1.2 Question 2

Lorsque l'on mets le problème (1) sous forme variationnelle, on trouve la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$a : \begin{array}{ccc} H^1(\Omega)^2 & \to & \mathbb{C} \\ (u,v) & \mapsto & \int_\Omega (\nabla u \nabla v - w^2 uv)dx \end{array}$$

Cette dernière n'est alors pas nécessairement coercive. En effet, par exemple pour $w = 0$ et $u \in H^1(\Omega)$, on a :

$$a(u,u) = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||u||^2_{H^1(\Omega)} = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)}$$

Cependant, on peut facilement trouver des conditions suffisantes pour que le problème soit coercif. Premièrement, si $w \in i\mathbb{R}$, alors $w^2 \in \mathbb{R}_-$ et on a :

$$\Re(a(u,u)) = a(u,u) \geq \min(1, -w^2)||u||^2_{H^1(\Omega)}$$

De manière un peu plus générale, on a :

$$\Re(a(u,u)) = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} - \Re(w^2)||u||^2_{L^2(\Omega)}$$

Et ainsi avec l'inégalité suivante :

$$\Re(a(u,u)) \geq \min(1, -\Re(w^2))||u||^2_{H^1(\Omega)}$$

On a donc que a est coercive dès que :

$$\min(1, -\Re(w^2)) > 0$$
$$\iff -\Re(w^2) > 0$$
$$\iff \Re(w^2) < 0$$
$$\iff \Re(w)^2 < \Im(w)^2$$
$$\iff |\Re(w)| < |\Im(w)|$$

La routine qui permet de calculer et tracer la solution du problème de Helmloltz est FiniteElementP1(filename,w,d,trace).

On obtient alors les tracés suivant pour $w = 5\pi$ et $d = [1, 0]$:

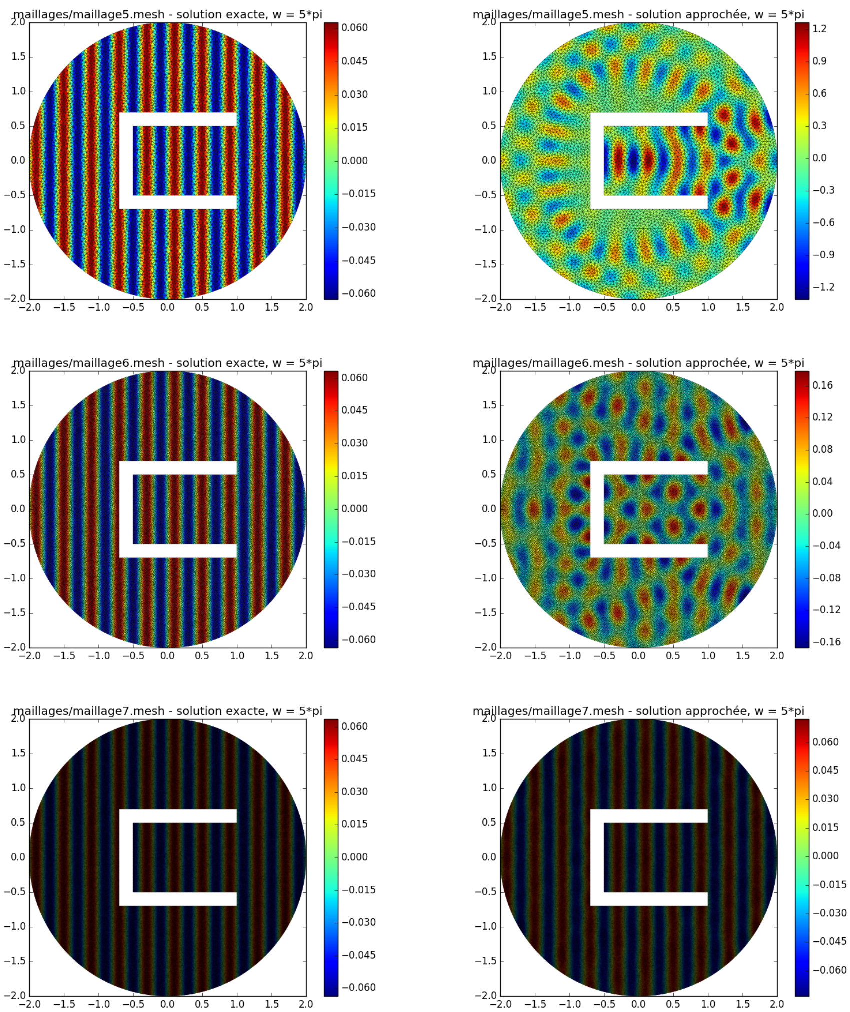

Figure 2 – Solution exacte et approchée pour $w = 5\pi$ pour les maillages 5 à 7

Et voici les tracés pour $w = i$ et $d = [1, 0]$:

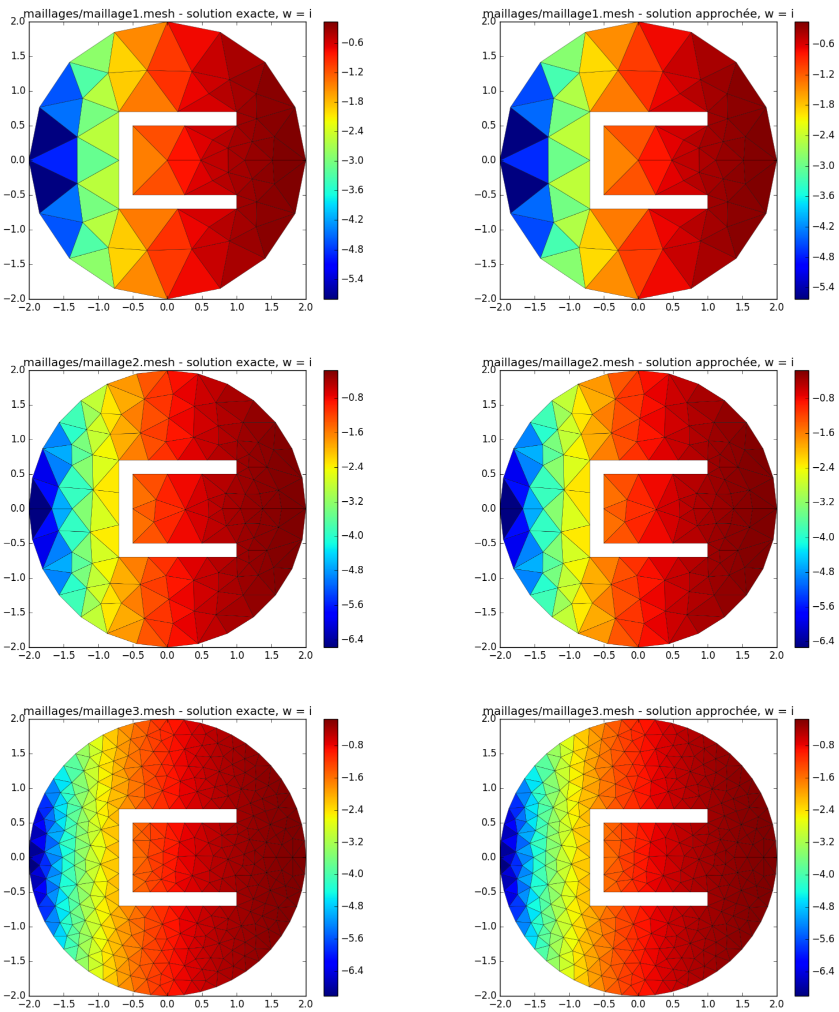

FIGURE 3 – Solution exacte et approchée pour $w = 5\pi$ pour les maillages 1 à 3

1.3 Question 3

Dans le cas où $g(x)$ est donnée par (2), on peut chercher u sous la forme :

$$u_{ref} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & K \exp(iw < d, x >) \end{array}$$

Au quel cas en calculant le laplacien de u et en faisant le produit scalaire avec la normale extérieure unitaire on trouve que :

$$K = -\frac{i}{w}$$

et :

$$u_{ref} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & -\frac{i}{w} \exp(iw < d, x >) \end{array}$$

Pour les 7 maillages donnés, le tracé de l'erreur $E(w,h)$ pour $w \in [5, 10, 20, 40, 80]$ donne :

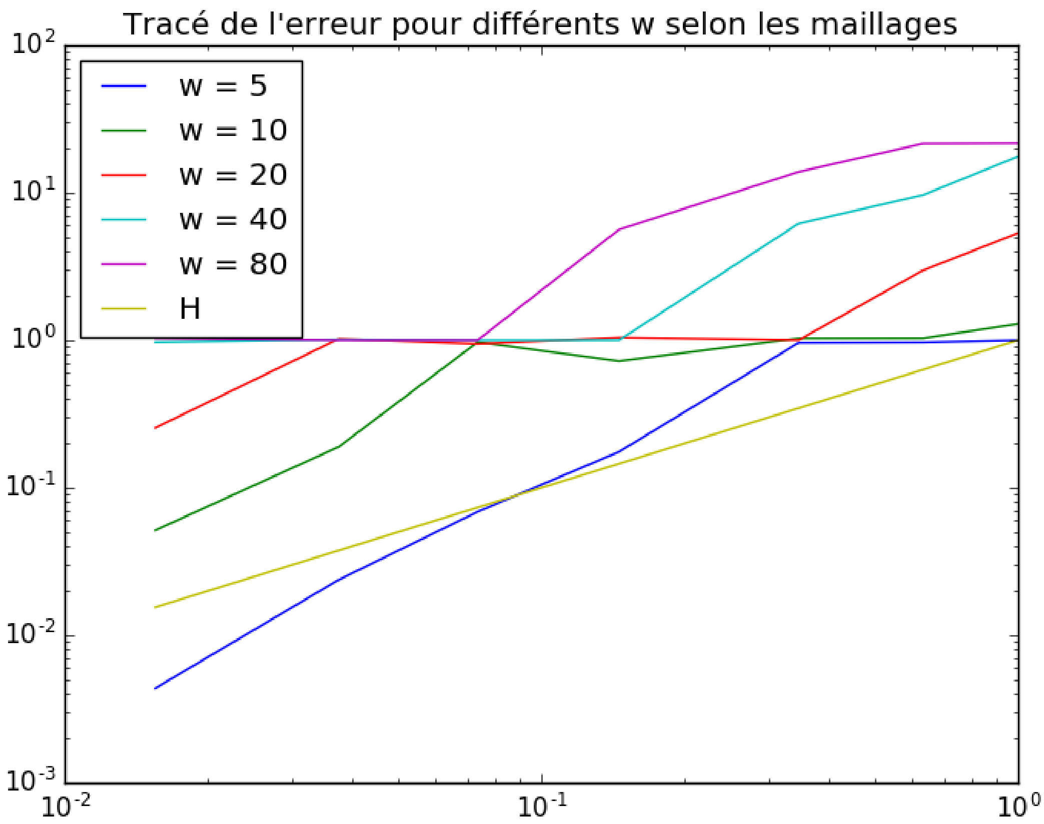

FIGURE 4 – Tracé de l'erreur relative $E(w,h)$ pour $w \in [5, 10, 20, 40, 80]$ en échelle log-log

On voit donc que pour w de plus en plus grand, l'erreur est de plus en plus importante.

2 Phénomène de résonnance

2.1 Question 4

Pour déterminer à quelles conditions sur $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il $U \in \mathbb{R}^{N_s} \backslash \{0\}$ tel que :

$$KU = \lambda MU$$

On a les équivalences suivantes : Pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\exists U \in \mathbb{R}^{N_s} \backslash \{0\},\ KU = \lambda MU &\iff \exists U \in \mathbb{R}^{N_s} \backslash \{0\},\ (K - \lambda M)\, U = 0 \\
&\iff \exists U \in \mathbb{R}^{N_s} \backslash \{0\},\ U \in \ker(K - \lambda M) \\
&\iff \ker(K - \lambda M) \neq \{0\} \\
&\iff \det(K - \lambda M) = 0
\end{aligned}$$

Donc pour chaque λ racine du polynôme en X $det(K - XM)$, il existe $U \neq 0 \in \mathbb{R}^{N_s}$ solution du problème aux valeurs propres généralisées.

Voici le tableau des 6 plus petites valeurs propres généralisées pour les 7 maillages donnés.

Table 1 – Tableaux des valeurs propres pour les maillages 1 à 7

	1	2	3	4	5	6
Maillage 1	-0.0	0.376	0.52	1.174	2.236	2.267
Maillage 2	-0.0	0.361	0.489	1.108	2.098	2.179
Maillage 3	0.0	0.355	0.476	1.078	2.034	2.135
Maillage 4	-0.0	0.347	0.465	1.052	2.005	2.114
Maillage 5	0.0	0.344	0.462	1.046	1.997	2.109
Maillage 6	0.0	0.344	0.461	1.043	1.995	2.108
Maillage 7	0.0	0.343	0.46	1.042	2.107	1.994

2.2 Question 5

Pour le 5 ième maillage donné, lorsque l'on détermine les 6 plus petites racines de ce polynôme, on obtient les solutions U suivantes :

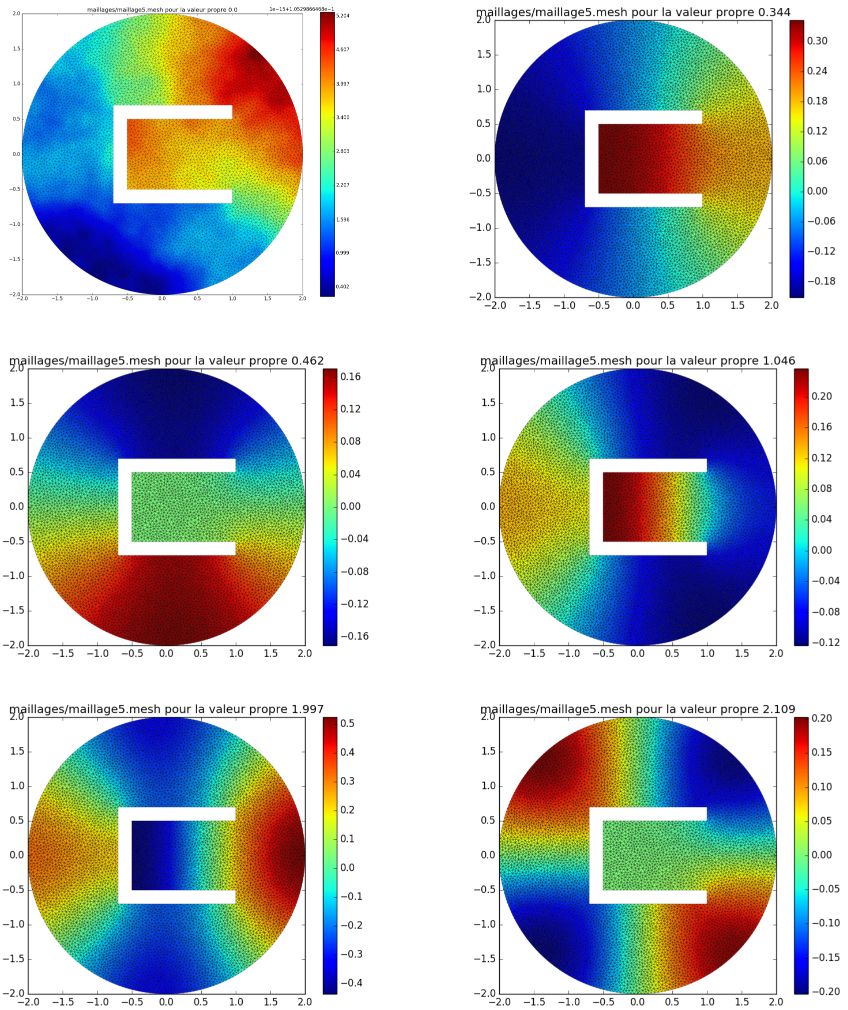

Figure 5 – Solution approchée pour les 6 plus petites valeurs propres du maillages 5