

Méthodes des éléments finis - condition de Dirichlet homogène

5

Objectif de la séance :

— Implémentez les conditions de Dirichlet homogènes.

1 Condition de Dirichlet homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, \mathbf{n} le champs de vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω et $f \in L_2(\Omega)$.
Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

Exercice 1 (Formulation variationnelle).

→ Proposez une formulation variationnelle pour le problème (5.1) et montrez que celle-ci est bien posée.

Soit \mathcal{T}_h une triangulation du domaine Ω . Notons $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de \mathcal{T}_h , $(S_i^0)_{i=1,d}$ les nœuds sur le bord du maillage, $(S_i^{int})_{i=1,N}$ les nœuds à l'intérieur du maillage, $(S_i)_{i=1,N+d}$ l'ensemble des nœuds, $(\varphi_i^0)_{i=1,d}$ les fonctions de base P^1 associées aux nœuds du bord dont on note l'espace vectoriel engendré V_h^0 , $(\varphi_i^{int})_{i=1,N}$ les fonctions de base P^1 associées aux nœuds à l'intérieur du maillage dont on note l'espace vectoriel engendré V_h et $(\varphi_i)_{i=1,N+d}$ l'ensemble des fonctions P^1 associées au maillage.

Exercice 2 (Formulation variationnelle discrétisée).

→ Proposez une formulation variationnelle discrète pour le problème (5.1) et montrez que celle-ci est bien posée.

Par construction, la solution approchée u_h a la forme suivante : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N+d} u_h^i \varphi_i(\mathbf{x}).$$

2 Prise en compte de la condition de Dirichlet

Il existe plusieurs façon d'implémenter une condition de Dirichlet. Remarquez déjà que celle-ci diffère de la condition de Neumann rencontrée à la séance précédente. En effet, cette dernière faisait apparaître un terme supplémentaire dans la formulation variationnelle, qui valait zéro dans le cas de condition de Neumann homogène. Elle était donc naturellement vérifiée par le système linéaire qui résultait de la formulation variationnelle discrétisée.

La condition apparaît ici non pas dans la forme bilinéaire ou dans forme linéaire de la formulation variationnelle mais bien dans l'espace dans lequel on cherche la solution. C'est pourquoi on parle de condition "essentielle" au contraire de la condition de Neumann qui est une condition "naturelle". Son implémentation sera tout aussi différente.

Pseudo-élimination

Notons $\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K}$. Une approche naturelle aurait été d'assembler la matrice associée aux éléments intérieurs au maillage puisque les nœuds sur le bord sont contraints :

$$\mathbb{A}_{int} = \left(\int_{\Omega} \varphi_i^{int} \varphi_j^{int} + \int_{\Omega} \nabla \varphi_i^{int} \cdot \nabla \varphi_j^{int} \right)_{i,j=1,\dots,N} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{int} = \left(\int_{\Omega} f \varphi_i^{int} \right)_{i=1,\dots,N}$$

et nous aurions eu une matrice de taille $N \times N$ au lieu de $(N+d) \times (N+d)$. Un des problèmes de cette approche est qu'elle implique une différentiation des éléments (ici des triangles) en fonction du nombre de nœuds contraints qui les composent. Par exemple,

- lors de l'assemblage, il faudra différencier les tailles des matrices élémentaires puisqu'il n'y a pas de contribution pour les nœuds sur le bord.
- si l'on veut évaluer la valeur en un point d'une fonction approximée, il faudra vérifier le type de triangle dans lequel le point est, pour savoir le nombre de fonctions de base qu'il faut prendre en compte.

Tout ceci peut se compliquer encore plus si l'on applique une condition de Dirichlet sur une partie du bord seulement. Dans ce cas, la différentiation systématique des triangles sera encore plus complexe car il faudra savoir le type de condition associé au bord. Du point de vue d'une bibliothèque éléments finis, cela veut dire qu'on ne peut pas définir de fonctions bouclant sur les éléments, pour l'assemblage par exemple, sans informations supplémentaires car ces fonctions dépendraient alors des conditions aux bords qui sont définies par l'utilisateur de la bibliothèque.

Pour résumer, cette approche fait qu'il faudrait grandement modifier et compliquer le reste du code. Une alternative possible est d'assembler entièrement la matrice, comme dans le cas d'une condition de Neumann :

$$\mathbb{A} = \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j + \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \right)_{i,j=1,\dots,N+d} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \left(\int_{\Omega} f \varphi_i \right)_{i=1,\dots,N+d}.$$

Nous allons ensuite modifier le système linéaire pour que la condition de Dirichlet soit vérifiée. Pour cela, prenons S_i un nœud du bord, nous modifions les coefficients du bord tels que

$$\mathbb{A}_{j,i} = \mathbb{A}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_i = 0$$

pour tout $1 \leq j \leq N+d$. Le système linéaire complet peut alors se réécrire, après une éventuelle renumérotation :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{int} & 0 \\ 0 & I_d \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{int} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Pseudo-élimination).

1. Implémentez une fonction qui prend en argument une matrice et un tableau d'entiers (correspondant aux nœuds sur le bord) et qui modifie la matrice en appliquant l'approche de pseudo-élimination présentée ci-dessus.
2. Vérifiez votre fonction en résolvant le problème (5.1). Contentez vous de vérifier la valeur au bord pour l'instant.

Pénalisation exacte

Une approche numérique plus simple est de multiplier les termes diagonaux associés aux termes de bord par *tg* (*terrible giant value*), un nombre de l'ordre de 10^{30} par exemple. Comme en double précision les nombres ont seize chiffres significatifs, les termes multipliés par *tg* sont dans un espace de nombre indépendant et l'erreur sur les conditions de Dirichlet sera de 10^{-30} .

Exercice 4 (Pénalisation exacte).

1. Implémentez une fonction qui prend en argument une matrice et un tableau d'entiers (correspondant aux nœuds sur le bord) et qui modifie la matrice en appliquant l'approche de pénalisation exacte présentée ci-dessus.
2. Vérifiez votre fonction en résolvant le problème (5.1) et comparer par rapport à la pseudo-élimination.

3 Résolution du problème

Pour tester l'application des conditions aux limites, nous pouvons résoudre un problème dont nous connaissons la solution afin de vérifier que notre solution approximée s'en approche bien, de la même façon que pour les conditions de Neumann.

Exercice 5 (Résolution numérique).

1. Soit Ω un domaine rectangulaire, choisissez une fonction u qui vérifie les conditions aux limites de (5.1). (on pourra prendre un produit de cosinus bien choisi)
2. Déduisez une fonction f telle que la fonction u de la question précédente soit solution de (5.1).
3. Résolvez numériquement (5.1) avec la pseudo élimination et la pénalisation exacte.
4. Vérifiez graphiquement que la solution numérique u_h est une approximation correcte de u en la représentant graphiquement sur le maillage ainsi que la solution exacte u .

Exercice 6 (Étude de l'erreur).

1. Donnez une expression de la semi-norme H^1 de l'erreur, $|u - u_h|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_2(\Omega)}$, faisant intervenir la matrice de rigidité \mathbb{K} . Tracez $\log h \mapsto \log(|u - u_h|_{H^1})$ pour différentes valeurs de h . Qu'observez vous ? Expliquez. (on pourra assimiler u à son interpolée)
2. Faites de même avec la norme L_2 de l'erreur, $\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)}$. Que remarquez vous cette fois-ci ?