

Espaces de Sobolev 2

Exercice 1 (Quelques identités). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe au moins \mathcal{C}^1 , \mathbf{n} le champs de vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω et n_i sa i ème composante.

1. Soit $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^d$, rappelez la formule de Stokes
2. Démontrez la formule d'intégration par parties : soient $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds. \quad (2.1)$$

3. Démontrez la formule suivante : soient $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $\boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^d$

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) \boldsymbol{\varphi}(x) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (2.2)$$

4. Redémontrez la formule de Green (aussi appelée première identité de Green) : soient $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\partial\Omega} v(x) \nabla u(x) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (2.3)$$

5. Démontrez la formule suivante (aussi appelée deuxième identité de Green) : soient $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx - \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) dx = \int_{\partial\Omega} (v(x) \nabla u(x) \cdot \mathbf{n} - u(x) \nabla v(x) \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (2.4)$$

6. Dans \mathbb{R}^3 , le rotationnel d'une fonction $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est défini de la façon suivante :

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\varphi}) = \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.5)$$

Démontrez la formule suivante : soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^3$

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx - \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{u}(x) dx = - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{n})(x) \cdot \mathbf{v}(x) ds. \quad (2.6)$$

Exercice 2 (Dérivés faibles). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe au moins \mathcal{C}^1 .

1. Soit $u \in L^2(\Omega)$ dérivable faiblement selon tout x_i pour $1 \leq i \leq d$. Montrez qu'il existe $\mathbf{p} \in L^2(\Omega)^d$ telle que pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)^d$, on ait la relation suivante

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})(x) dx = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}(x) \cdot \mathbf{p}(x) dx \quad (2.7)$$

Exercice 3 (Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe au moins \mathcal{C}^1 . Nous pouvons généraliser la définition de $H^1(\Omega)$ aux fonctions qui sont $m \geq 0$ fois dérivables

au sens faible. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un vecteur à d composantes entières positives. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ et pour une fonction u ,

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(x) \quad (2.8)$$

À partir de la définition de la dérivée faible, on définit par récurrence la dérivée faible d'ordre m . C'est-à-dire, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dite m fois dérivable au sens faible si toutes ses dérivées partielles faibles d'ordre $m-1$ sont dérivables faiblement. On peut alors définir les espaces de Sobolev suivants :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | \forall \alpha, \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\} \quad (2.9)$$

1. Montrez que $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) \, dx \quad (2.10)$$

et de la norme associée est un espace d'Hilbert.

Exercice 4 (Espace de Sobolev $H_{\text{div}}(\Omega)$). Soit $\sigma \in L^2(\Omega)^d$, par définition, σ admet une divergence faible w s'il existe $w \in L^2(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx = - \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) \, dx. \quad (2.11)$$

La divergence faible sera notée $\text{div } \sigma$ à partir de maintenant. L'espace $H_{\text{div}}(\Omega)$ est alors défini de la manière suivante :

$$H_{\text{div}}(\Omega) = \{\sigma \in L^2(\Omega)^d, \text{ tel que } \text{div } \sigma \in L^2(\Omega)\}. \quad (2.12)$$

1. Montrez que $H_{\text{div}}(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \tau(x) + \text{div } \sigma(x) \text{div } \tau(x) \, dx \quad (2.13)$$

et de la norme associée est un espace d'Hilbert.

Exercice 5 (Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe au moins \mathcal{C}^1 . Nous définissons l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$

1. Montrez que $H_0^1(\Omega)$ muni du même produit scalaire que $H^1(\Omega)$ et de la norme associée est un espace d'Hilbert.
2. Montrez que l'identité (2.2) se généralise pour $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H_{\text{div}}(\Omega)$. (On pourra utiliser le fait que $(\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^d$ est dense dans $H_{\text{div}}(\Omega)$)

Exercice 6 (Continuité de la trace en 1D). Soit un intervalle $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Pour $u \in \mathcal{C}^1(I)$, montrez l'inégalité suivante

$$|u(a)| \leq C^{te} \|u\|_{H^1(I)} \quad (2.14)$$

où C^{te} est une constante indépendante de u .

2. En déduire que l'application suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : H^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto u(a) \end{aligned} \quad (2.15)$$

est continue.

3. Montrez que la formule d'intégration par partie (2.1) est encore vraie pour $u, v \in H^1(I)$.
4. Soit $c \in I$ et $u \in L^2(I)$ telle que $u|_{[a, c]} = u_1 \in H^1([a, c])$ et $u|_{[c, b]} = u_2 \in H^1([c, b])$. Montrez l'équivalence suivante :

$$u \in H^1(I) \iff u_1(c) = u_2(c). \quad (2.16)$$