

Formulations variationnelles 3

Exercice 1 (Théorème de trace). Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe au moins \mathcal{C}^1 et \mathbf{n} le champs de vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω . Montrer que l'application suivante

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\partial\Omega}) \\ u &\longmapsto \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $v \in H^2(\Omega)$, on a

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^2(\Omega)}$$

Exercice 2 (Densité et théorèmes de trace). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe au moins \mathcal{C}^1 .

1. Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds. \quad (3.1)$$

Montrez que cette identité est encore vraie pour $u, v \in H^1(\Omega)$.

2. Soient $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\partial\Omega} v(x) \nabla u(x) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.2)$$

Montrez que cette identité est encore vraie pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$.

Exercice 3 (Formulation variationnelle).

1. Étant donné une constante $\alpha > 0$, et une fonction $f \in L^2(0, 1)$, proposez une formulation variationnelle pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha \frac{du}{dx} + u = f \text{ sur }]0, 1[\\ \text{avec } u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

2. Montrez que cette formulation variationnelle admet une unique solution.

Exercice 4 (Formulation variationnelle : condition de Robin/Fourier). Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe au moins \mathcal{C}^1 .

1. Étant donné une constante $\gamma > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$, proposez une formulation variationnelle pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u = g. \end{cases}$$

2. Montrez que cette formulation variationnelle admet une unique solution.

Exercice 5 (Formulation variationnelle : Diffusion-convection). Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe au moins \mathcal{C}^1 , α et γ des fonctions régulières de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R} , \mathbf{b} une fonction régulière de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R}^d et $f \in L^2(\Omega)$. Supposons que pour tout $x \in \Omega$, $0 < \alpha^* < \alpha(x)$.

1. Proposez une formulation variationnelle pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u(x)) = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrez que cette formulation variationnelle admet une unique solution.

2. Supposons que \mathbf{b} est à divergence nulle et que $0 \leq \gamma(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Proposez une formulation variationnelle pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \gamma(x)u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrez que cette formulation variationnelle admet une unique solution.

3. Supposons que $0 \leq \gamma(x) - \operatorname{div}(\mathbf{b})(x)/2$ pour tout $x \in \Omega$. Proposez une formulation variationnelle pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \gamma(x)u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrez que cette formulation variationnelle admet une unique solution.