

Chapitre 1

Formulations variationnelles des EDP elliptiques du second ordre

1 Exemples d'EDP elliptiques

Électrostatique

$$\begin{cases} -\Delta V = \rho/\epsilon_0 & \text{dans } \Omega \\ V = V_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec: V = potentiel électrostatique
 ρ = distribution de charge
 V_0 = potentiel imposé sur le bord de la cavité
 ϵ_0 = permittivité du milieu

Ondes de pression en régime harmonique

Onde pression $\tilde{p}(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$ se propageant dans une cavité $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (par exemple le son dans les alvéoles d'un parpin).

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{p} - c^2 \Delta \tilde{p} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \tilde{p} = \tilde{g} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $c := \sqrt{\lambda/\rho}$

λ = coefficient de Lamé
 ρ = masse volumique

Ici la condition sur $\partial\Omega$ correspond à une pression connue/imposée \tilde{g} sur le bord. On suppose alors un régime périodique en temps établi à la pulsation ω ce qui nous amène à poser $\tilde{g}(\mathbf{x}, t) = \Re\{g(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\}$ et $\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = \Re\{p(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\}$. Le problème se re-écrit alors:

$$\begin{cases} -\Delta p - (\omega/c)^2 p = 0 & \text{dans } \Omega \\ p = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Élastostatique

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $\mathbf{f} :=$ forces agissant sur le solide Ω
 $\mathbf{u} =$ déplacement induit par les forces
 $\lambda, \mu =$ coefficients de Lamé

2 Domaines réguliers

Pour $d = 1, 2, 3$ un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$ lorsque, pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^d$ contenant \mathbf{x} , et un \mathcal{C}^k -difféomorphisme $\phi_{\mathbf{x}} : \mathcal{U}_{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{B} :=$ boule unité $= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, |\mathbf{x}| \leq 1\}$ tels que

- $\phi_{\mathbf{x}}(\mathcal{U}_{\mathbf{x}} \cap \Omega) = \mathbf{B} \cap \mathbb{R}_+^d = \{\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d \cap \mathbf{B}, x_d > 0\}$
- $\phi_{\mathbf{x}}(\mathcal{U}_{\mathbf{x}} \cap \partial\Omega) = \mathbf{B} \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) = \{\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d \cap \mathbf{B}, x_d = 0\}$

Autrement dit Ω est partout localement d'un seul côté de son bord et difféomorphe à un demi-espace cartésien. On peut démontrer, par le théorème des fonctions implicites, que ceci est équivalent à dire que le bord de Ω est localement le graphe d'une fonction de classe \mathcal{C}^k dans une repère orthonormé convenablement tourné et translaté.

Dans toute la suite on supposera systématiquement que Ω est un ouvert borné de classe au moins \mathcal{C}^1 , et \mathbf{n} représentera le champ de vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω .

2.1 Formule de Stokes

Notons $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ une base orthonormée fixée de \mathbb{R}^d . Soit $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteur avec $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ c'est-à-dire que pour $g_j(\mathbf{x}) := \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})$ on a $g_j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j = 1 \dots d$. Alors on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{g}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (1)$$

où $d\sigma$ désigne la mesure de surface sur $\partial\Omega$ (induite par la mesure de Lebesgue $d\mathbf{x}$ dans \mathbb{R}^d), et où l'on rappelle que $\operatorname{div}(\mathbf{g}) := \partial_{x_1} g_1 + \partial_{x_2} g_2 + \dots + \partial_{x_d} g_d$.

2.2 Formule de Green

La formule de Stokes est fondamentale dans l'analyse des EDP. Elle a notamment pour conséquence directe la formule de Green. Prenons $\mathbf{g} = v \nabla u$ où $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Alors on a $\operatorname{div}(\mathbf{g}) = v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u$ où $\Delta u := \partial_{x_1}^2 u + \dots + \partial_{x_d}^2 u$. En appliquant la formule de Stokes (1) on obtient alors:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} v \partial_{\mathbf{n}} u d\sigma \\ \text{où } \partial_{\mathbf{n}} u &:= \mathbf{n} \cdot \nabla u|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (2)$$

Il s'agit de la formule de Green qui va jouer un rôle central dans tout ce qui va suivre.

3 Premier problème modèle

On souhaite étudier le problème,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

où $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est une donnée du problème. Pour étudier (3) on commence par le reformuler. Supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Pour tout $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ la formule de Green fournit:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + v \underbrace{\Delta u}_{=u-f} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \underbrace{\partial_{\mathbf{n}} u}_{=0} d\sigma$$

On en déduit:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) & \text{et} \\ a(u, v) = \ell(v) & \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \end{cases} \quad (4)$$

avec $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv d\mathbf{x}$
 $\ell(v) := \int_{\Omega} fv d\mathbf{x}$

On voit que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ alors (3) \Rightarrow (4). Y a-t-il une réciproque? Rappelons un résultat de densité (cf cours de théorie de la mesure, ou bien corollaire IV.23 dans [1]).

Proposition 3.1.

L'espace $\mathcal{C}_0^1(\Omega) := \{v|_{\Omega}, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d) \text{ et } v = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d \setminus \Omega\}$ est dense dans $L^2(\Omega)$: pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Supposons maintenant que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et vérifie (4), et choisissons $v \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \subset \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. D'après la formule de Green, on a:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(4)}{=} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv - fv d\mathbf{x} \\ 0 &= \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + v\Delta u d\mathbf{x}}_{\stackrel{(2)}{=} \int_{\partial\Omega} v\partial_{\mathbf{n}} u d\sigma} + \int_{\Omega} v(-\Delta u + u - f) d\mathbf{x} \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\partial\Omega} v\partial_{\mathbf{n}} u d\sigma = 0 \end{aligned}$$

On a donc finalement:

$$\int_{\Omega} v(-\Delta u + u - f) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

Posons $\varphi = -\Delta u + u - f \in L^2(\Omega)$ et choisissons une suite $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ qui tend vers $\overline{\varphi}$ dans $L^2(\Omega)$. En choisissant $v = \varphi_n$, ce qui précède s'écrit $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\varphi|^2 d\mathbf{x}$. D'où l'on tire finalement $\varphi = -\Delta u + u - f = 0$ dans Ω .

Comme $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, on a $\partial_{\mathbf{n}}u \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$. Donc il existe $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tel que $v|_{\partial\Omega} = \partial_{\mathbf{n}}u$. Alors d'après (4) on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv - fv \, d\mathbf{x} \\ 0 &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + v\Delta u \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v(-\Delta u + u - f) \, d\mathbf{x} \\ 0 &\stackrel{(2)}{=} \int_{\partial\Omega} v\partial_{\mathbf{n}}u \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} |\partial_{\mathbf{n}}u|^2 \, d\sigma \implies \partial_{\mathbf{n}}u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Bilan: On a démontré que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ alors (3) \iff (4). Pour démontrer que (4) admet une unique solution, on aimerait appliquer le théorème de Lax-Milgram. Mais on a un souci car $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ n'est pas complet. On va donc chercher le plus petit espace complet contenant $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ au sens d'une norme "qui marche bien" pour notre problème.

4 Dérivation faible

Pour pouvoir définir un cadre fonctionnel mieux adapté à notre problème il nous faut introduire une généralisation de la notion classique de dérivation. On dit qu'une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est faiblement dérivable par rapport à la variable x_j lorsque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } v_j \in L^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} u \partial_{x_j} \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} v_j \varphi \, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (5)$$

On dit alors que v_j est la dérivée faible de u par rapport à x_j . Pour désigner cette fonction on adopte une notation plus intuitive, en posant par définition:

$$\partial_{x_j} u := v_j.$$

Pour signifier que u est faiblement dérivable par rapport à x_j on écrira désormais " $\partial_{x_j} u \in L^2(\Omega)$ ".

Exemple: Soit $I =]0, 2[$ et $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = 0$ si $x \in]0, 1]$ et $u(x) = (x - 1)$ si $x \in [1, 2[$. Alors u est faiblement dérivable. En effet soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(I)$ arbitraire. On a:

$$\begin{aligned} \int_I u \frac{d\varphi}{dx} \, dx &= \int_1^2 (x - 1) \frac{d\varphi}{dx}(x) \, dx \\ &= [(x - 1)\varphi(x)]_1^2 - \int_1^2 \varphi(x) \, dx \\ &= \underbrace{\varphi(2)(2 - 1)}_{=0 \text{ car } \varphi(2)=0} - \varphi(1)0 - \int_0^2 1_{[1,2]}(x) \varphi(x) \, dx \end{aligned}$$

où $1_{[1,2]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[1, 2]$ c'est-à-dire $1_{[1,2]}(x) = 1$ pour $x \in [1, 2]$, et $1_{[1,2]}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus [1, 2]$. On déduit donc du calcul précédent que

$$\int_I u \frac{d\varphi}{dx} \, dx = - \int_0^2 1_{[1,2]} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(I)$$

de sorte que $1_{[1,2]} \in L^2(I)$ est la dérivée faible de u sur I .

Gradient faible Dans la suite, si $u \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée faible $\partial_{x_j} u$ par rapport à chacune de ses variables, on définit son gradient faible

$$\nabla u = \mathbf{e}_1 \partial_{x_1} u + \cdots + \mathbf{e}_d \partial_{x_d} u.$$

où $(\mathbf{e}_j)_{j=1}^d$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^d . Dans la suite, pour signifier que u admet un gradient faible, on écrira " $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ ", ou encore que " $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$ ".

Proposition 4.1.

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ de sorte que u admet un gradient $\nabla u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^d$ définie au sens classique (sens fort) par $\mathbf{e}_j \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} (u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - u(\mathbf{x}))/h$ pour $j = 1 \dots d$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Alors u admet également un gradient au sens faible $\nabla u \in L^2(\Omega)$, et on a $\nabla u = \nabla u$.

Démo:

Il suffit de démontrer que $\partial_{x_j} u := \mathbf{e}_j \cdot \nabla u = \partial_{x_j} u$ pour chaque $j = 1 \dots d$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ arbitraire. Appliquons la formule de Stokes (1) en choisissant $\mathbf{g} = u\varphi\mathbf{e}_j$. Puisque $\operatorname{div}(\mathbf{g}) = \operatorname{div}(u\varphi\mathbf{e}_j) = \partial_{x_j}(u\varphi) = \varphi\partial_{x_j}u + u\partial_{x_j}\varphi$, on obtient:

$$\int_{\Omega} \varphi \partial_{x_j} u \, d\mathbf{x} \stackrel{(1)}{=} - \int_{\Omega} u \partial_{x_j} \varphi \, d\mathbf{x} \stackrel{(5)}{=} \int_{\Omega} \varphi \partial_{x_j} u \, d\mathbf{x}$$

On en tire

$$\int_{\Omega} (\partial_{x_j} u - \partial_{x_j} u) \varphi \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

Posons $\psi := \partial_{x_j} u - \partial_{x_j} u \in L^2(\Omega)$. D'après le résultat de densité donné par la proposition 3.1, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, $n \geq 0$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$. On a donc finalement $\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \overline{\psi}(\psi - \varphi_n) \, d\mathbf{x} \leq \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$. On en tire donc finalement $\psi = 0$ c'est-à-dire $\partial_{x_j} u = \partial_{x_j} u$. \square

Le résultat précédent montre donc que la dérivation faible étend de manière consistante la notion de dérivation classique que l'on appelle parfois dérivation forte. Désormais nous pourrons écrire $\partial_{x_j} u$ sans nous préoccuper de savoir si il s'agit de la dérivée au sens fort ou faible.

5 Espace de Sobolev

On définit

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega)\}. \quad (6)$$

Il s'agit clairement d'un espace vectoriel vérifiant $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Attention ces inclusions sont strictes. On munit cet espace du produit scalaire:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \overline{v} + u \overline{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Ce produit est bien défini puisque $\nabla u, \nabla v \in L^2(\Omega)$. Il s'agit bien d'un produit scalaire car la sesquilinearité est évidente, $(u, u)_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$, et $(u, u)_{H^1(\Omega)} = 0 \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow u = 0$. On note $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ la norme associée à ce produit scalaire:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Lemma 5.1.

L'espace $H^1(\Omega)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Démo:

Soit $u_n \in H^1(\Omega)$, $n \geq 1$ une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. On a $\|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)}$ donc u_n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Comme $L^2(\Omega)$ est un espace complet, il existe donc $g \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - g\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Par ailleurs on a $\|\partial_{x_j} u_n - \partial_{x_j} u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)}$, on en tire donc que pour chaque $j = 1 \dots d$, la suite $\partial_{x_j} u_n$, $n \geq 1$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. A nouveau comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe un $h_j \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\partial_{x_j} u_n - h_j\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Montrons maintenant que, pour chaque $j = 1 \dots d$, la fonction g est faiblement dérivable par rapport à x_j et que $\partial_{x_j} g = h_j$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ arbitraire. Pour chaque $n \geq 0$ on a $\int_{\Omega} u_n \partial_{x_j} \varphi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi \partial_{x_j} u_n d\mathbf{x} \forall n \geq 0$. Par passage à la limite dans $L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$ (à j et φ fixés) on en tire:

$$\int_{\Omega} g \partial_{x_j} \varphi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} h_j \varphi d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

On en déduit donc que $\partial_{x_j} g = h_j \in L^2(\Omega)$ pour tout $j = 1 \dots d$, et finalement $g \in H^1(\Omega)$. Par ailleurs on a $\|u_n - g\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u_n - g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^d \|\partial_{x_j} u_n - h_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc (u_n) converge vers $g \in H^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On a donc finalement démontré que toute suite de Cauchy de $H^1(\Omega)$ converge dans $H^1(\Omega)$ de sorte que cet espace est complet. \square

Corollary 5.1.

L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

References

- [1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.