

# Chapitre 0

## Analyse hilbertienne élémentaire

### 1 Définitions et résultats élémentaires

**Définition 1.1.**

Un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $H$  est dit *pré-hilbertien* si il est muni d'une application  $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  appelée *produit scalaire vérifiant*, pour tout  $x, y, z \in H$  et tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ :

- (a)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- (b)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- (c)  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
- (d)  $(x, x) \in \mathbb{R}_+$
- (e)  $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

Comme conséquence immédiate de cette définition, on voit que l'application  $x \mapsto (x, y)$  est linéaire pour tout  $y \in H$ . On a de plus  $(0, y) = 0$ , et  $(x, z + \alpha y) = (x, z) + \overline{\alpha}(x, y)$ . Un produit scalaire induit une norme naturelle sur un espace de pré-hilbertien:

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}.$$

**Lemma 1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).**

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in H.$$

**Démo:**

Posons  $A = \|x\|^2$ ,  $B = |(x, y)|$  et  $C = \|y\|^2$ . Soit également  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $|\alpha| = 1$  et  $\alpha(y, x) = B$ . Alors pour tout  $r \in \mathbb{R}$  on a:

$$\begin{aligned} \|x - \alpha r y\|^2 &= (x - \alpha r y, x - \alpha r y) \\ &= \|x\|^2 - r\alpha(y, x) - r\overline{\alpha}(x, y) + r^2\|y\|^2 \\ &= A - 2rB + Cr^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si  $C = 0$  alors l'inégalité annoncée est trivialement vérifiée puisqu'alors  $y = 0$ . Sinon on prend  $r = B/C$  et on obtient  $B^2 \leq AC$ . □

**Lemma 1.2 (Inégalité triangulaire).**

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in H.$$

**Démo:**

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\
&= \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\Re\{(x, y)\} + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

□

Notons que l'application  $x, y \mapsto \|x - y\|$  définit une distance sur  $H$ . Ainsi un espace préhilbertien est en particulier un espace métrique.

**Definition 1.2.**

*Un espace pré-hilbertien  $H$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  est un espace de Hilbert si il est complet pour la norme  $\|\cdot\|$  associée au produit scalaire.*

**Exemple 1**  $\mathbb{C}^n$  muni du produit scalaire  $(x, y) := x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n$  pour tout  $x = (x_j)_{j=1}^n, y = (y_j)_{j=1}^n$  est un Hilbert.

**Exemple 2** En notant  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , l'espace  $L^2(I)$  des fonctions de carré intégrable (modulo l'égalité presque partout au sens de la mesure de Lebesgue) est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire  $f, g \mapsto \int_I f(t)\bar{g}(t)dt$ .

**Exemple 3**  $\mathcal{C}^0(\bar{I})$  n'est *pas* un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire  $f, g \mapsto \int_I f(t)\bar{g}(t)dt$ , car il n'est pas complet pour la norme associée.

**Lemma 1.3.**

*Étant donné un espace de Hilbert  $H$  et son produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ , soit  $y \in H$  arbitraire. Définissons deux applications  $\varphi_1, \varphi_2 : H \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\varphi_1(x) := (x, y)$  et  $\varphi_2(x) := \|x\|$ . Alors ces deux applications sont continues.*

**Démo:**

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on  $|\varphi_1(x) - \varphi_1(x')| = |(x - x', y)| \leq \|x - x'\| \|y\|$ . Donc  $\varphi_1$  est lipschitzienne au sens de  $\|\cdot\|$  et en particulier continue.

On a d'autre part  $\|x\| = \|x - x' + x'\| \leq \|x - x'\| + \|x'\| \Rightarrow \|x\| - \|x'\| \leq \|x - x'\|$ . On établit de même que  $\|x'\| - \|x\| \leq \|x - x'\|$  de sorte que finalement on obtient  $|\varphi_2(x) - \varphi_2(x')| = |\|x\| - \|x'\|| \leq \|x - x'\|$ . Donc  $\varphi_2$  est lipschitzienne au sens de  $\|\cdot\|$  et continue. □

## 2 Projection sur un sous-espace

**Definition 2.1.**

*Un sous-ensemble  $M \subset H$  d'un espace de Hilbert est un sous-espace vectoriel si pour tout  $x, y \in M$  et tout  $\alpha \in \mathbb{C}$  on a  $x + \alpha y \in M$ .*

La norme  $\|\cdot\|$  sur  $H$  associée au produit scalaire induit une norme sur  $M$ . Si  $M$  est fermé pour cette norme, alors il est complet (un fermé dans un complet est lui-même complet), et c'est donc un sous-espace qui est lui-même un espace de Hilbert (pour le produit scalaire induit).

**Theorem 2.1.**

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $F \subset H$  un sous-espace fermé non vide. Alors pour tout  $u \in H$  il existe un unique  $f \in F$  tel que

$$\|u - f\| = \min_{g \in F} \|u - g\|.$$

**Démo:**

A l'aide de calculs élémentaires, on montre facilement l'identité suivante (dite identité du trapèze):

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in H. \quad (1)$$

Notons  $\delta := \inf_{g \in F} \|u - g\|$ . Prenons  $g, g' \in F$  et appliquons (1) avec  $x = u - g$  et  $y = u - g'$ . On obtient  $\|g - g'\|^2 = 2\|u - g'\|^2 + 2\|u - g\|^2 - \|g + g' - 2u\|^2$ . Si  $f, f' \in F$  vérifient tous les deux  $\|u - f\| = \|u - f'\| = \delta$  alors on obtient

$$\|f - f'\|^2 = 4\delta^2 - 4 \underbrace{\|u - (f + f')/2\|^2}_{\geq \delta^2} \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

d'où  $f = f'$ . Il y a donc unicité de  $f \in F$  vérifiant  $\|u - f\| = \delta$ . Vérifions qu'un tel  $f$  existe. Soit  $g_k \in F, k \geq 0$  une suite telle que

$$\|g_k - u\| \leq \inf_{g \in F} \|g - u\| + 1/k \quad (2)$$

De ceci on tire en particulier que  $\|g_k - u\|^2 - \|h - u\|^2 \leq 1/k^2$  pour tout  $h \in F$ . Montrons que la suite  $(g_k)$  est de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|$ . On applique pour cela (1) à  $x = u - g_m$  et  $y = u - g_k$  et, puisque  $h = (g_k + g_m)/2 \in F$ , on en tire

$$\begin{aligned} \|g_m - g_k\|^2 &\leq 2\|u - g_m\|^2 + 2\|u - g_k\|^2 - 4\|u - (g_m + g_k)/2\|^2 \\ &\leq 2(\|u - g_m\|^2 - \|u - g\|^2) + 2(\|u - g_k\|^2 - \|u - g\|^2) \\ &\leq 2/k^2 + 2/m^2. \end{aligned}$$

Donc  $(g_k)$  est de Cauchy et comme  $F$  est complet, cette suite converge dans  $F$  vers une limite  $f \in F$ . Par continuité, on peut alors passer à la limite dans (2) pour  $k \rightarrow \infty$ , et on en tire  $\|f - u\| \leq \inf_{g \in F} \|g - u\|$ .  $\square$

**Corollary 2.1.**

Avec les hypothèses du théorème précédent, on a  $(u - f, g) = 0 \forall g \in F$ .

**Démo:**

Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . On a  $\|u - f + tg\|^2 = \|u - f\|^2 + 2t \Re\{(u - f, g)\} + t^2\|g\|^2$ . Puisque  $f - tg \in F$ , la propriété de minimisation satisfaite par  $f$  implique  $\|u - f\|^2 \leq \|u - f + tg\|^2$ . On en tire alors  $2t \Re\{(u - f, g)\} + t^2\|g\|^2 \geq 0$ . En divisant cette dernière inégalité par  $|t|$ , et en faisant  $t \rightarrow 0_+, t > 0$  on en tire:  $\Re\{(u - f, g)\} \geq 0$ . De même, en faisant  $t \rightarrow 0_-, t < 0$  on obtient  $\Re\{(u - f, g)\} \leq 0$ . On a donc finalement

$$\Re\{(u - f, g)\} = 0.$$

ceci vaut pour tout  $g \in F$ . On peut donc considérer  $\imath g$  au lieu de  $g$  (où  $\imath = \sqrt{-1}$ ), on obtient  $0 = \Re\{(u - f, \imath g)\} = \Re\{-\imath(u - f, g)\} = \Im\{(u - f, g)\} = 0$ . Finalement on conclut que  $(u - f, g) = 0$ .  $\square$

### 3 Résultats d'existence-unicité

Pour tout  $x \in H$  l'application  $y \mapsto (x, y)$  est anti-linéaire, c'est-à-dire  $(x, y + \alpha z) = (x, y) + \overline{\alpha}(x, z) \forall x, y, z \in H$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ , et continue d'après le lemme 1.3. Le théorème suivant, fondamental en analyse hilbertienne, nous dit que c'est en fait la forme que prennent toutes les fonctionnelles antilinéaires continues.

**Theorem 3.1 (Représentation de Riesz).**

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et de la norme  $\|\cdot\|$  correspondante. Pour toute forme anti-linéaire continue  $\varphi : H \rightarrow \mathbb{C}$  il existe un unique  $x \in H$  tel que

$$\varphi(y) = (x, y) \quad \forall y \in H.$$

De plus cette correspondance est isométrique:

$$\|x\| = \sup_{y \in H \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(y)|}{\|y\|}.$$

**Démo:**

Soit  $F := \text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ . C'est un sous-espace fermé de  $H$  car  $\varphi$  est continue. Supposons que  $F \neq H$  sinon  $\varphi = 0$  et le théorème est trivialement vérifié avec  $x = 0$ . Soit  $u \in H \setminus F$  et  $f \in F$  tel que  $\|u - f\| = \min_{g \in F} \|u - g\|$  (cf théorème 2.1). Posons enfin  $z = (u - f)/\|u - f\|$  de sorte que  $\|z\| = 1$  et  $(g, z) = (z, g) = 0$  pour tout  $g \in F$ . On choisit

$$x = \varphi(z) z$$

On a alors pour tout  $y \in H$

$$\begin{aligned} (x, y) &= (\varphi(z) z, y) = \varphi(z)(z, y) = (z, \overline{\varphi(z)} y) \\ &= (z, \underbrace{\overline{\varphi(z)} y - \overline{\varphi(y)} z}_{\in \text{Ker}(\varphi) = F}) + \varphi(y) \underbrace{(z, z)}_{=1} = \varphi(y). \end{aligned}$$

ce qui démontre la première partie de l'énoncé. De ceci on tire que  $|\varphi(y)| \leq \|x\| \|y\| \forall y \in H$  par Cauchy-Schwarz. Donc en divisant par  $\|y\|$ , et en prenant la borne sup en  $y$ , on obtient

$$\sup_{y \in H \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(y)|}{\|y\|} \leq \|x\| = \frac{(x, x)}{\|x\|} = \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{y \in H \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(y)|}{\|y\|}.$$

□

Une application  $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  est dite sesquilinéaire si elle vérifie  $a(x, y + \alpha z) = a(x, y) + \overline{\alpha}a(x, z)$  et  $a(x + \alpha z, y) = a(x, y) + \alpha a(z, y)$  pour tout  $x, y, z \in H$  et tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Theorem 3.2 (rappel: point fixe).**

Soit  $E$  muni de la norme  $\|\cdot\|$  un espace de Banach (i.e. un e.v.n complet) et soit  $S : E \rightarrow E$  une application contractante, c'est-à-dire  $\|S(x) - S(y)\| \leq k\|x - y\| \forall x, y \in E$  où  $k \in ]0, 1[$ . Alors il existe un unique  $u \in E$  tel que  $S(u) = u$ .

Nous concluons ce chapitre par un théorème charnière qui est la base de beaucoup de résultats d'existence/unicité pour les EDP elliptique. Ce résultat est d'un usage constant tant sur le plan théorique que numérique.

**Theorem 3.3 (Lax-Milgram).**

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ . Soit  $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  une forme sesquilinéaire continue telle qu'il existe  $\alpha > 0$  et

$$\Re\{a(v, v)\} \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in H.$$

Alors pour toute forme anti-linéaire continue  $\varphi : H \rightarrow \mathbb{C}$  il existe un unique  $u \in H$  tel que  $a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H$ .

**Démo:**

D'après le théorème de Riesz, il existe  $b \in H$  et une application linéaire continue  $A : H \rightarrow H$  tels que  $\varphi(v) = (b, v)$  et  $a(w, v) = (Aw, v)$  pour tout  $w, v \in H$ . On veut démontrer qu'il existe un unique  $u \in H$  tel que  $(Au - b, v) = 0 \quad \forall v \in H$ , ce qui s'écrit encore  $Au = b$ . Étant donné un  $\rho > 0$  que nous fixerons plus tard, posons

$$S_\rho(v) := v - \rho(Av - b).$$

Pour toute valeur de  $\rho$  on a  $Au = b \iff S_\rho(u) = u$ . Examinons si  $S_\rho$  est contractante. En développant l'expression  $\|w\|^2 = (w, w)$  où  $w = S_\rho(v) - S_\rho(v')$  on obtient

$$\begin{aligned} \|S_\rho(v) - S_\rho(v')\|^2 &= \|v - v' - \rho A(v - v')\|^2 \\ &= \|v - v'\|^2 + \rho^2 \|A(v - v')\|^2 - 2\rho \Re\{\underbrace{(A(v - v'), v - v')}_{=a(v-v', v-v')}\} \\ &\leq (1 + \rho^2 \|a\|^2 - 2\alpha\rho) \|v - v'\|^2 \end{aligned}$$

où on a noté  $\|a\|$  le module de continuité de  $a(\cdot, \cdot)$ . L'estimation ci-dessus vaut pour tout  $\rho > 0$ . Choisissons donc la valeur qui minimise  $1 + \rho^2 \|a\|^2 - 2\alpha\rho$ , ce qui nous amène à prendre  $\rho = \alpha/\|a\|^2$ . On obtient alors

$$\|S_\rho(v) - S_\rho(v')\| \leq \sqrt{1 - (\alpha/\|a\|)^2} \|v - v'\| \quad \forall v, v' \in H$$

ce qui garantit donc que  $S_\rho$  est contractante. On peut alors appliquer le théorème du point fixe, ce qui conclut cette démonstration.  $\square$